

颗粒物质在微剪切振动下的能量耗散研究

汪盼盼, 王万景, 刘长松, 朱震刚

(中国科学院固体物理研究所 材料物理重点实验室, 合肥 230031)

摘 要: 采用改进的低频内耗仪研究了几种常见颗粒体系(沙子、玻璃珠)的相对能量耗散性质: 能量耗散的振幅谱和频率谱。实验发现, 振幅谱中随振幅增大形成一个能量耗散峰, 而频率谱线中则观察到随着频率的增加依次出现四个能量耗散峰, 对应着体系模量的四个衰减。随探针插入深度的增加相对能耗先增加后减小, 出现一个能耗峰值, 该峰值对应的深度为体系的临界深度。基于对颗粒体系的介观分析, 提出一个流变模型来阐述流变耗散机制, 结果表明摩擦在颗粒力学响应中除耗散能量外还起到增加体系弹性的作用。频率谱的分析表明颗粒中还存在另一种耗散机制: 颗粒链的共振耗散。

关 键 词: 颗粒物质; 能量耗散; 力链

中图分类号: O 347.7

文献标识码: A

Research on relative energy dissipation in sheared granular materials

WANG Pan-pan, WANG Wan-jing, LIU Chang-song, ZHU Zhen-gang

(Key Laboratory of Materials Physics, Institute of Solid State Physics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

Abstract: Using a developed low frequency inverted torsion pendulum, the relative energy dissipation in sheared granular materials is investigated. The amplitude and the frequency spectra of fine sand and glass beads are measured. The results show that with the increase of amplitude, one peak of energy dissipation is found in amplitude spectra; while with increasing frequency, four peaks of energy dissipation are observed in the curves of frequency spectra, corresponding to four decreases of the relative modulus. And there exists a peak (corresponding to a critical depth) in the curves of relative energy dissipation along with the inserted depth of probe with different oscillating amplitudes. Based on the mesoscopical analysis of granular materials, a rheological model is presented to explain the rheological dissipation mechanics; and the results indicate that the friction among particles not only dissipates the energy but also enhances the elasticity of the system. The frequency spectra of fine sand reveal a different dissipation: the resonant dissipation.

Key words: granular material; energy dissipation; force chain

1 引 言

颗粒物质是指直径大于 $1\ \mu\text{m}$ 的大量颗粒的集合体, 在自然界中广泛存在。由于其静止时类似于固体, 流动时又类似于液体, 是一种特殊的物质形态。颗粒物质许多奇特的行为, 如巴西果效应、粮仓效应、振动斑图、压力凹陷、流动与阻塞等, 早就引起了人们的关注, 而且人们对这些现象的研究从未间断。然而由于颗粒间的非线性相互作用, 理论和实验研究变得相对困难。颗粒物质中力的分布是不均匀的, 并且通过不均匀力链形成力的网络, 力链上颗粒承受的力很强, 而其它位置上颗粒受的

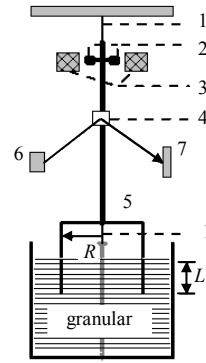
力则很弱, 甚至不受力, 所以力链上颗粒的任何微小的位置变动都会引起整个体系中力分布的很大变化。给我国国民经济带来重大经济损失的自然灾害山体滑坡就是颗粒体系中某处剪切应力超过力链的屈服值造成力链网络断开, 发生颗粒流动的结果。提高对山体滑坡运动规律的认知, 并指导山体滑坡灾害的防治, 需要我们深入研究弹性能量在颗粒物质中的传播和耗散规律, 特别是颗粒体系中力链结构及其在外加应力作用下的变化规律^[1-2]。

颗粒物质为能量耗散体系, 外界输入的能量通过颗粒局域结构的微小调整、摩擦而耗散。在凝聚态物理学中要深入地研究体系中能量损耗规律, 得

到相关动力学参数, 谱学技术 (如光谱、介电谱、内耗或力学谱等) 是行之有效的办法。它们的特征都是以一定频率的交变信号去刺激样品, 测量其反应信号。当外加频率与样品中某一特征结构的本征频率相近时, 反应信号将会出现极大值, 得到一条谱线。这些谱学技术是否可以应用到颗粒物质的研究中呢? 内耗谱的测量频率范围是数 kHz 至 μHz , 完全覆盖了结构慢跃迁 (变化) 过程的本征频率范围, 而且所加刺激信号为交变应力, 反应信号为应变, 所以适用于任何能够传播应力波的物体。基于我国科学家葛庭燧先生发明的“葛摆”改进的面向颗粒物质的低频内耗 (力学) 谱仪就可以研究颗粒体系在外加剪切应力作用下的能量耗散性质。由于颗粒物质相对处于 $K_B T = 0$ 的状态, 外界作用或颗粒运动产生的能量耗散使温度升高, 不对颗粒体系产生影响, 所以本文主要研究其相对能耗与振幅和深度的关系, 相对能耗与频率的关系, 并在此基础上分析提出两种耗散机制: 流变耗散和颗粒链的共振耗散。

2 实验装置及测量原理

实验在改进的低频倒扭摆内耗仪上进行, 图 1 为倒扭摆简图。圆筒形“探针”用铝合金制作, 半径 R 为 17 mm, 壁厚为 1 mm, 可以绕轴自由剪切转动。颗粒物质装载在一个内径为 38 mm 的容器里。测量时容器固定在底座上, 探针从容器中心插入颗粒中, 上下悬丝的作用是防止探针侧向振动。实验中, 通过激励线圈和永久磁铁给探针施加一个交变应力 $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, 探针就绕轴作往复剪切转动。但是, 由于系统受到颗粒物质试样的阻力, 系统惯量的阻力以及导向钢丝的阻力, 探针会产生一个位移 $A(t) = A_0 \sin(\omega t - \Phi)$ 。这里 F_0 是交变驱动力的振幅, A_0 是系统往复位移的振幅, Φ 是应变振幅 $A(t)$ 落后于应力 $F(t)$ 的位相差, $\omega = 2\pi\nu$ 为角频率, ν 为振动频率。选择的测量模式为强迫振动模式。实验样品主要是沙子、玻璃珠, 直径分布都是 0.054~0.11 mm。细沙表面粗糙, 未经过处理, 而玻璃珠表面相对较规则。实验测量前探针表面粘有一层被测颗粒。另外, 由于颗粒体系的性质受测量历史的影响, 因此测量前要先对颗粒体系进行长时间的微小振动, 将其震平压紧以消除历史效应带来的影响。实验中, 探针剪切振动的最大角位移为 0.4° , 即探针的剪切位移不超过 $0.1d$, d 为颗粒直径。



1—悬丝; 2—永久磁铁; 3—外部激励线圈; 4—镜子;
5—圆筒探针; 6—光源; 7—光探测器

图 1 倒扭摆简图

Fig.1 Sketch of inverted torsion pendulum

一个外力循环中机械能的损耗为

$$\Delta W = \oint F dA = F_0 A_0 \pi \sin \Phi \quad (1)$$

在 $1/4$ 循环中外力对系统作的功是 $\int_{\omega t=0}^{\pi/2} F dA$, 振动系统损失的机械能是 $\Delta W/4$, 因此振动系统最大储能为

$$W = \int_{\omega t=0}^{\pi/2} F dA - \frac{\Delta W}{4} = \frac{1}{2} F_0 A_0 \cos \Phi \quad (2)$$

类似于固体内耗, 定义颗粒的相对能量耗散为

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (3)$$

将 ΔW 、 W 的表达式代入上式中, 即得到强迫振动法测量颗粒物质相对能耗的表达式:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} = \tan \Phi \quad (4)$$

同时可以得出体系的模量:

$$G = F_0 / A_0 \quad (5)$$

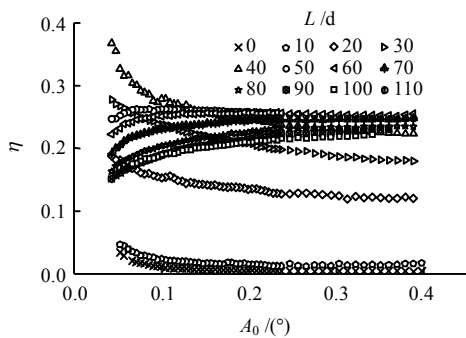
颗粒材料的相对能耗值 η 实际等于包含颗粒样品时整个系统的相对能耗值减去空载时系统的相对能耗值。实验前测量了空载时内耗振幅谱和频率谱, 结果显示空载时倒扭摆体系的相对能耗和模量相对于加载颗粒样品时小很多, 因而在实际测量中, 可把悬丝近似看作一个弹性体, 用加载颗粒样品时整个系统的相对能耗值来代表颗粒体系的相对能耗。

3 实验结果

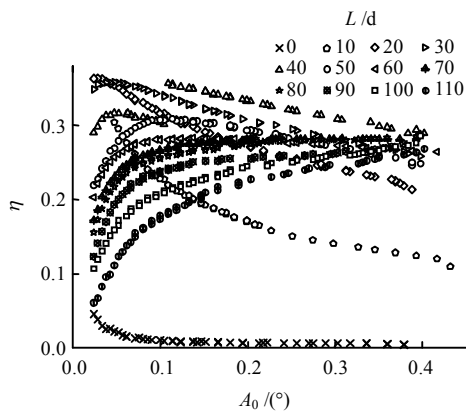
3.1 相对能耗与振幅和深度的关系

利用上述倒扭摆组成的低频内耗仪, 测量了细

沙和玻璃珠两种体系的内耗振幅谱：探针插入深度不同时内耗与振幅的关系，如图2所示。这里， L/d 是以层数为单位的插入深度。由图可以发现，不同作用深度下细沙体系和玻璃珠体系的 η 随剪切振幅 A_0 的变化存在如下共同点：①当探针插入颗粒体系的深度较小时， η 随 A_0 增大单调减小；②随着探针插入颗粒体系的深度增加，当到达某一临界深度后， η 随 A_0 增大先增大后减小，出现一个能量耗散峰；③如果探针插入颗粒体系的深度再继续增加，最终 η 随 A_0 增大而单调增大。另外值得注意的一点是，插入深度较小时，不同作用深度下 η 的差值较大，即存在显著的深度依赖性。于是我们进一步研究了不同剪切振幅下，细沙体系和玻璃珠体系的 η 随探针插入深度 L/d 的变化关系，如图3所示。从图3中可以清楚地看到，在一定的剪切振幅时， η 随着探针插入深度增大先增大后减小，在临界深度 L_c 处， η 到达最大值 η^* 。临界深度 L_c 大致在 $L/d \approx 30$ 处，且随 A_0 增大向右端移动，最终消失。

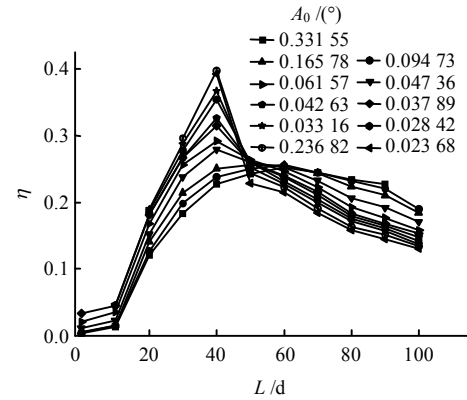


(a) 细沙体系

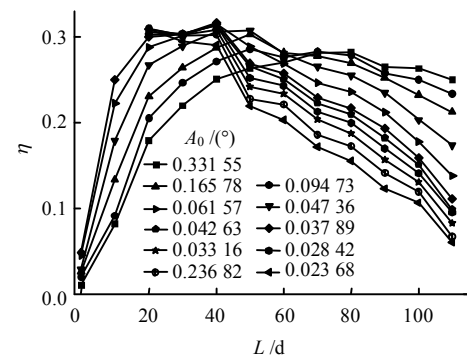


(b) 玻璃珠体系

图2 相对能耗 η 随剪切振幅 A_0 的变化关系
Fig.2 Variation of relative energy dissipation η along shear amplitude A_0



(a) 细沙体系



(b) 玻璃珠体系

图3 不同剪切振幅 A_0 下，相对能耗 η 随探针插入深度 L/d 的变化曲线

Fig.3 Variation of relative energy dissipation η along inserted depth of probe under different shear amplitudes A_0

3.2 相对能耗与频率的关系

测量样品为细沙。在 η 的频率谱中发现随着频率增大依次出现四个耗散峰，对应体系模量的四个衰减（图4、5）。

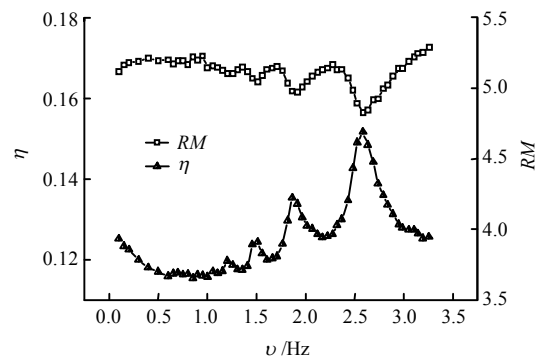


图4 剪切振幅 $A_0=0.142^\circ$ 时，细沙体系的相对能量耗散 η 和相对模量 RM 随频率的变化曲线

Fig.4 Variation curves of relative energy dissipation η and relative modulus of fine sand system along frequency when shear amplitude $A_0=0.142^\circ$

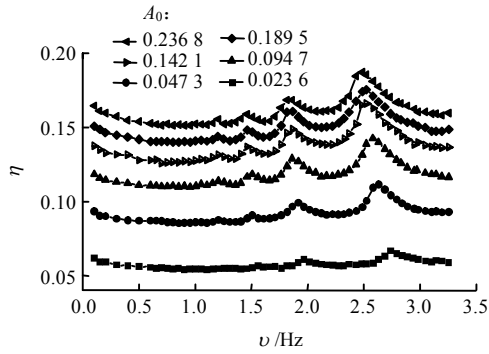


图5 不同剪切振幅作用下细沙体系的相对能耗 η 随频率 ν 的变化关系

Fig.5 Variation of relative energy dissipation η along frequency ν of fine sand system under different shear amplitudes

4 分析与讨论

4.1 流变耗散

分析剪切扰动对颗粒物质结构的影响可知, 探针低频剪切时对颗粒物质的影响范围仅为距离圆筒探针表面几个颗粒直径的区域, 该区域以外的颗粒几乎不受剪切作用的影响, 且影响程度随着离探针表面距离增加而迅速衰减。那么, 在剪切振动过程中, 颗粒体系产生的阻碍扭摆探针转动的力是怎样分布的呢? 根据 Albert 等^[3]关于在颗粒体系中缓慢运动的物体所受到的阻止力的研究可知, 阻止力来源于不同深度的一系列颗粒链。体系中各层力链强度不同, 深度越深, 力链越稳定。将被测颗粒体系分成 $n=L/d_g$ 个厚度为 d_g 的水平颗粒层, 当剪切振幅较小时, 每一层的许多颗粒链会产生一系列拖拉力矩。这些阻止探针转动的颗粒链起始于探针表面, 之后延伸几个颗粒直径的距离。每一层的颗粒链对应一个临界摩擦力 f_c , 当外加应力小于这个临界值时, 颗粒链是稳定的, 而当外加应力大于这个值时, 颗粒链就会变形断裂, 从而力网结构被破坏, 内部颗粒发生相对滑动, 因而伴随着能量的损耗。但是这些相对滑动位移非常小, 都低于颗粒的直径尺寸, 不会导致颗粒体系的位形重构。颗粒链的临界摩擦力 f_c 可以近似表示为 $f_c = \mu_s K \rho g \ell$, 其中, μ_s 为静摩擦系数, K 为常数, ρ 为颗粒密度, g 为重力加速度, ℓ 为颗粒链所在深度^[4]。由 $G = F/A$ 可知, 深度为 ℓ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的颗粒层内颗粒链所受的最大应变振幅为 $A_{ci} = f_{ci} / g_i = \mu_s K \rho g \ell_i / g_i$, 其中 g_i 为颗粒链的弹性模量, 在微剪切下可看作一个常量。因此, A_{ci} 与颗粒表面摩擦系数、颗粒密度和作用深度均有关。

基于以上分析, 我们提出一个介观流变模型^[5]。考虑到颗粒体系中不同的水平层, 将每一水平层看作一个弹簧和一个滑块 (即一个非线性分支), 代表该颗粒层在剪切振动下的弹性性质和能量耗散性质。因而该模型包含一系列非线性分支, 如图 6 所示, 剪切常量为 G_p 的弹簧代表悬丝部分, 每个非线性分支中弹簧的剪切常量用 g_i ($i=1, 2, \dots, n$) 表示, 滑块的临界摩擦用 τ_{ci} ($i=1, 2, \dots, n$) 表示。

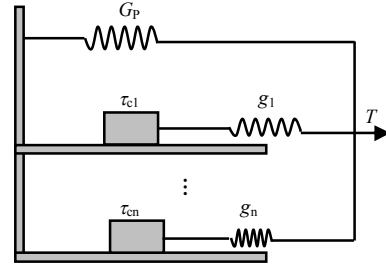


图6 颗粒体系介观流变模型
Fig.6 The mesoscopic rheological model of granular materials

实验发现, 颗粒间出现相对滑动主要与临界振幅和作用深度有关。插入深度一定时, 颗粒体系在某一剪切振幅下, 会有一定数量的颗粒层发生相对滑动。当插入深度较小时, 即使剪切振幅较小, 所有的颗粒层都会发生滑动。随着插入深度增大到一定值, 下面的部分颗粒层在小振幅剪切作用下不再滑动。这些不滑动的颗粒层表现类似于弹簧单元。为方便讨论, 我们首先将全部非线性分支简化为两部分, 上部分支由一个临界摩擦力为 T_a 的滑块和一个剪切常量为 G_a 的弹簧表示, 这部分颗粒间发生相对滑动, 参与能量耗散; 下部分支由一个剪切常量为 G_b 的弹簧表示, 这部分颗粒层不发生相对滑动, 基本不耗散能量, 只为体系提供弹性回复力。下面我们将给出一个具体的相对能耗 η 随剪切振幅以及作用深度变化的近似解析表达式。

在剪切作用下, 体系的能耗 ΔW 和总的储能 W 为

$$\Delta W = 4T_a(A_0 - A_c) \quad (6)$$

$$W = (G_p + G_b) \frac{A_0^2}{2} + G_a \frac{A_c^2}{2} \quad (7)$$

式中: $T_a = A_c G_a$, A_c 为滑块的临界振幅。由相对能耗和模量的定义可得:

当 $A_0/A_c > 1$ 时,

$$\eta = \frac{4}{\pi} \frac{\frac{A_0}{A_c} - 1}{\frac{G_p + G_b}{G_a} \left(\frac{A_0}{A_c} \right)^2 + 1} \quad (8)$$

$$G = G_p + G_b + \frac{G_a}{(A_0/A_c)} \quad (9)$$

当 $A_0/A_c < 1$ 时,

$$\eta = 0 \quad (10)$$

$$G = G_p + G_b + G_a \quad (11)$$

假定每层颗粒的深度为 d_i , 临界深度以上的颗粒层数为 $n_0 = L_c/d_i$, 颗粒总层数为 $n = L/d_i$ 。对于上部分支有 $G_a = n_0 g_i$, 对于下部分支有 $G_b = (n - n_0) g_i$ 。引入一个无量纲的量 $\chi = (G_a + G_b)/G_p = n/k$, 其中 $k = G_p/g_i$ 。当 $n/n_0 < 1$ 时, $G_b = 0$ 。因此可得体系相对能耗和模量的表达式为分段函数式:

$n < n_0$ 时,

$$\eta = \frac{4}{\pi} \frac{\frac{A_0}{A_c} - 1}{\frac{k}{n} \left(\frac{A_0}{A_c} \right)^2 + 1} \quad (12)$$

$$G = G_p \left(1 + \frac{(n/k)}{(A_0/A_c)} \right) \quad (13)$$

$n > n_0$ 时,

$$\eta = \frac{4}{\pi} \frac{\frac{A_0}{A_c} - 1}{\left(\frac{k}{n_0} + \frac{n}{n_0} - 1 \right) \left(\frac{A_0}{A_c} \right)^2 + 1} \quad (14)$$

$$G = G_p \left(1 + \frac{n - n_0}{k} + \frac{(n_0/k)}{(A_0/A_c)} \right) \quad (15)$$

根据式 (12) 和 (14) 可以画出相对能耗 η 对约化深度 n 的关系曲线, 如图 7 所示。从图中可以看到, 当插入深度较小时, η 随深度增大单调增大, 达到某一临界深度后, η 随着作用深度增大而减小。同时还可看到, 在 $n \leq 3$ 时, η 随振幅增大单调减小, 而在 n 达到 3 之后, η 随振幅增大先增大后减小, 并最终在 $n = 8$ 之后随振幅增大而增大。即随着振幅增大, 临界深度也变大, 表现为 η 的最大值向右移动。模型拟合曲线的变化趋势与实验结果基本一致。

另外, 由于表面摩擦不同导致细沙体系和玻璃珠体系的耗散情形也不一样。由前面的讨论可知,

最大静摩擦力正比于颗粒表面摩擦系数和密度, 细沙表面形状不规则, 表面摩擦系数比玻璃珠的大, 所以细沙体系的深度耗散峰要比玻璃珠体系的高。以上分析讨论说明, 颗粒表面摩擦在实验中有着重重要的意义, 正是摩擦导致了能量耗散。在耗散峰前, 相对能耗随着作用深度增大而增大, 在耗散峰后, 即达到临界深度以后, 下面的部分颗粒层就不再滑动, 相对能耗会随着作用深度增大而减小, 说明此时摩擦主要表现为增加体系弹性。因此, 可将临界深度 L_c 看作转变深度, 在其两端颗粒摩擦扮演两个不同的角色: 耗散能量和增加体系弹性。

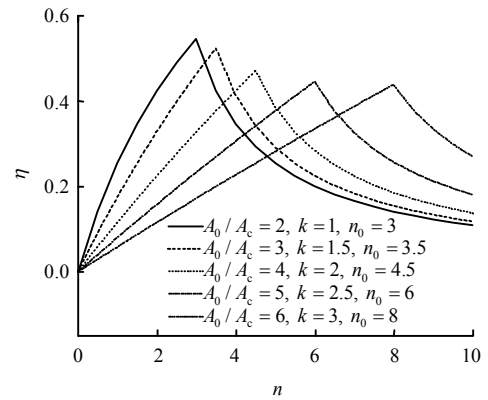


图 7 相对能耗 η 对约化作用深度 n 的关系曲线
Fig.7 Relative energy dissipation η versus reduced depth n according to the rheological model

由图 3 和图 7 可见, 模型拟合曲线与实验所得数据曲线之间存在一定的差异, 原因主要是由于不同颗粒层在剪切振动下的响应是不同的, 而为了处理的方便, 只是简单地将其分为上部分支和下部分支。同时, 颗粒表面摩擦系数影响体系中力链结构及其稳定性, 当表面摩擦系数较小时, 在剪切振动下, 体系中不易形成稳定力链^[6]。细沙颗粒表面粗糙, 而玻璃珠表面光滑, 摩擦系数相对较小, 因而玻璃珠体系的耗散规律没有细沙体系明显。

4.2 共振耗散

前面在分析相对能耗振幅谱的基础上, 提出了一个介观流变模型, 表明颗粒摩擦与能量耗散间有着对应关系。下面我们将讨论密堆积颗粒体系在外加剪切振动下的频率响应, 对比前面提出的流变耗散, 这里的耗散具有明显不同的机制。

图 4、图 5 清晰地显示, 随着频率增大, 内耗曲线依次出现四个峰, 且四个峰依次增大, 对应体系模量的四个衰减。重复减小或增大频率, 这些相对能量耗散峰和模量衰减仍存在。与流变耗散不

同, 这里的耗散与频率有关。假定这些能量耗散峰是由颗粒链的共振耗散产生的, 当圆筒探针插入颗粒体系并旋转剪切时, 沿圆筒表面准切线方向形成许多颗粒链, 这些颗粒链是由两个或两个以上颗粒组成的准线性排列, 几乎承载了所有的剪切负荷。在每个峰之前, 一条链中颗粒是强关联的, 对于小振幅剪切的响应是弹性的^[7-8], 能量损耗小; 当振动频率与某些链的共振频率相当时, 对应的颗粒链发生共振, 使得该颗粒链振幅较大引起颗粒链松散变形, 能量耗散大, 链中的关联强度减弱, 于是模量曲线出现极小值。由于结构弛豫产生的耗散峰对应的频率 ν 与弛豫时间 τ 呈反比, 而长链对应的弛豫时间长, 相应峰值频率小。因此图 4、图 5 中如果第四个耗散峰对应最短颗粒链 (即两个颗粒组成的链) 的共振耗散, 则前面三个峰由高到低依次对应着三颗粒链、四颗粒链、五颗粒链。颗粒链的长度越长, 在体系中的数量就越少, 耗散峰就越低, 因此实验中没有观察到更长链的耗散峰。

进一步研究共振频率与颗粒链中颗粒个数 i 的关系, 发现 $1/\nu^2$ 与 (i^2-i) 呈线性关系。根据简谐振动的频率公式简单假设由 i 个颗粒组成的颗粒链的共振频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (16)$$

式中: $m_i = im$, m 为一个颗粒的质量; $k_i = k/(i-1)$, k 是两颗粒间的弹性常数。

值得强调一点的是, 这里对颗粒链做了简化处理, 假定任意两颗粒的弹性强度 k 大致相等。因此共振频率与颗粒链中包含的颗粒个数 i 之间存在这样的关系: $1/\nu^2 \propto (i^2-i)$ 。根据图 4、图 5 中的实验结果, 作 $1/\nu^2$ 对 (i^2-i) 的图像, 如图 8 所示。数据可以

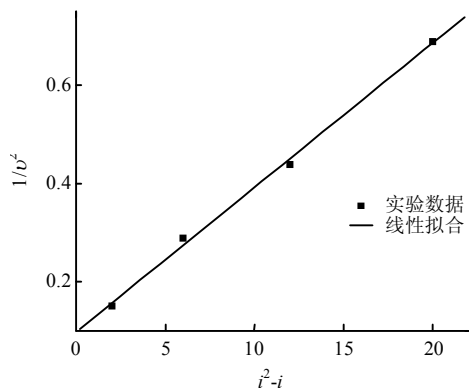


图 8 $(1/\nu^2)$ 对 (i^2-i) 的图像
Fig.8 $(1/\nu^2)$ versus (i^2-i)

很好地用直线 ($Y = A+B \cdot X$, 其中 $A = 0.097$, $B = 0.029$) 拟合。由此可见, 上述假设与分析基本是合理的。

5 结 论

颗粒体系在微剪切振动下的能量耗散是由体系中不均匀力链结构的微小变动引起的。

摩擦力在颗粒体系的力学响应中起着两个不同的作用: 耗散能量和增加体系弹性。在耗散峰之前, 颗粒摩擦主要是产生能量耗散, 而在耗散峰后, 摩擦就表现为增加体系弹性。

颗粒体系在微剪切作用下除了存在流变耗散外, 还存在共振耗散。

提出的流变耗散模型和共振耗散模型能够反映出颗粒体系能量耗散特征, 不仅合理解释了振幅耗散峰, 也较好地解释了频率耗散峰。

参 考 文 献

- [1] 陆坤权, 刘寄星. 软物质物理学导论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006.
- [2] 孙其诚, 王光谦. 颗粒物质力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [3] ALBERT R, PFEIFER M A, BARABÁSI A L, et al. Slow drag in a granular medium[J]. *Physical Review Letters*, 1999, 82(1): 205-208.
- [4] D'ANNA G. Mechanical properties of granular media, including snow, investigated by a low-frequency forced torsion pendulum[J]. *Physical Review E*, 2000, 62(1): 982-992.
- [5] WANG W J, KONG X Z, ZHU Z G. Friction and relative energy dissipation in sheared granular materials[J]. *Physical Review E*, 2007, 75(4): 041302-041308.
- [6] WANG W J, ZHU Z G. Two kinds of dissipation in sheared granular materials[J]. *Europhysics Letters*, 2008, 82(2): 24004-24005.
- [7] 孙其诚, 王光谦. 静态堆积颗粒中的力链分布[J]. *物理学报*, 2008, 57(8): 4667-4674.
- [8] GOLDENBERG C, GOLDBIRSH I. Friction enhances elasticity in granular solids[J]. *Nature*, 2005, 435: 188-191.
- [9] MUETH D M, DEBREGAS G F, KARZMAR G S, et al. Signatures of granular microstructure in dense shear flows[J]. *Nature (London)*, 2000, 406: 385-389.